Leçon 181 : Convexité dans $\mathbb{R}^n$. Applications en algèbre et en géométrie

Références : Combes (Alg. géom.), Tauvel (géom.), Szpirglas (Alg. L3), Mercier (Cours de géom.)

I – Notion de convexité

1) Barycentres – coordonnées barycentriques
2) Partie convexe de $\mathbb{R}^n$
3) Lien avec les fonctions convexes

II – Applications

1) Enveloppe convexe
2) Points extrémaux
3) Projection et hyperplans d'appui
4) Polytopes et polyèdres convexes

DEV 1 : Par 5 points passe une conique

DEV 2 : Krein-Millman

Leçon 181 : Convexité dans $\mathbb{R}^n$. Applications en algèbre et en géométrie

Dans toute cette leçon, on se place dans $\mathbb{R}^n$ vu comme $\mathbb{R}$-espace affine de direction $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$).

I - Notion de convexité

1) Barycentres - coordonnées barycentriques [COT]

PROP 1 : Soit $(A_i, \lambda_i)_{i \in I}$ une famille finie de points pondérés tel que $\sum_{i \in I} \lambda_i \neq 0$. Alors le point :

$$G = O + \frac{1}{\sum_{i \in I} \lambda_i} \sum_{i \in I} \lambda_i \overrightarrow{OA_i}$$ ne dépend pas du point O.

Ce point est aussi caractérisé par : $\sum_{i \in I} \lambda_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$.

DEF 2 : Lorsque $\sum_{i \in I} \lambda_i \neq 0$, le point G est appelé barycentre de la famille de points pondérés $(A_i, \lambda_i)_{i \in I}$. On note $G = \mathrm{Bar}(A_i, \lambda_i)$

DEF 3 : Si pour tout $i \in I$, $\lambda_i = \lambda \neq 0$, on dit que G est l'isobarycentre des points $A_1, \dots, A_k$.

PROP 4 : $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$, $\mathrm{Bar}((A_i, \lambda_i)_{i \in I}) = \mathrm{Bar}((A_i, \lambda \lambda_i)_{i \in I})$.

On peut supposer que $\sum_{i \in I} \lambda_i = 1$ et donner un sens à $G = \sum_{i \in I} \lambda_i A_i$ pour signifier : $\forall O \in \mathbb{R}^n, G = O + \sum_{i \in I} \lambda_i \overrightarrow{OA_i}$.

PROP 5 : Soit $(A_i, \lambda_i)_{i \in I}$ une famille finie de points pondérés de $\mathbb{R}^n$ telle que $\sum_{i \in I} \lambda_i \neq 0$. Soit $I = \dot{\bigcup}_{p=1}^{s} I_p$ une partition de I. Supposons que $\mu_p = \sum_{i \in I_p} \lambda_i \neq 0$ pour tout $p \in [1; s]$. Soit $G_p = \mathrm{Bar}((A_i, \lambda_i)_{i \in I_p})$. Alors $\mathrm{Bar}((A_i, \lambda_i)_{i \in I}) = \mathrm{Bar}(G_p, \mu_p)_{p \in [\![1; s]\!]}$

THM 6 : Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille finie de points. LASSE :
1) $\forall i \in I$, $(\overrightarrow{A_i A_j})_{j \neq i}$ est une base de $\mathbb{R}^n$
2) $\exists i \in I$, $(\overrightarrow{A_i A_j})_{j \neq i}$ est une base de $\mathbb{R}^n$
3) $\forall M \in \mathbb{R}^n, \exists (\lambda_i)_{i \in I}$, $M = \sum_{i \in I} \lambda_i A_i$.

DEF 7 : Lorsque 1), 2), 3) sont vérifiées on dit que $(A_i)_{i \in I}$ forme un repère affine de $\mathbb{R}^n$ et on dit que $(\lambda_i)_{i \in I}$ sont les coordonnées barycentriques de $(A_i)_{i \in I}$.

EX 8 : Trois points non alignés forment un repère affine de $\mathbb{R}^2$.

PROP 9 : Soit $(A_1, \dots, A_{n+1})$ un repère affine de $\mathbb{R}^n$.
- Si $M = \sum_{i=1} \lambda_i A_i$, les coordonnées cartésiennes de M dans le repère $(A_1, \overrightarrow{A_1 A_i})_{i \neq 1}$ sont $(\lambda_2, \dots, \lambda_n)$.
- Si $M = A_1 + \sum_{i=2}^{n+1} \lambda_i \overrightarrow{A_1 A_i}$, alors les coordonnées barycentriques de M dans le repère $(A_1, \dots, A_{n+1})$ sont $(1 - \sum_{j \neq 1} \lambda_j, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$

[AUD] DEV 1

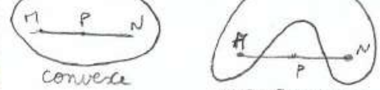
THM 10 : Soient A, B, C, D, E 5 points distincts du plan $\mathbb{R}^2$.
1) Il existe une conique $\mathcal{C}$ passant par les 5 points
2) La conique est unique $\Leftrightarrow$ il n'existe pas 4 points alignés parmi les 5.
3) La conique est non dégénérée $\Leftrightarrow$ il n'existe pas 3 points alignés parmi les 5.

2) Partie convexe de $\mathbb{R}^n$ [COT]

LEMME 11 : Soit $C \subset \mathbb{R}^n$, $C \neq \emptyset$. Les conditions suivantes sont équivalentes :
(1) Le barycentre G de toute famille $\{(A_1, \lambda_1), \dots, (A_k, \lambda_k)\}$ de points pondérés de C telle que $\lambda_1 \geq 0, \dots, \lambda_k \geq 0$ et $\sum_{i=1} \lambda_i = 1$, appartient à C.

DEF 12 : Une partie C de $\mathbb{R}^n$ vérifiant les conditions équivalentes précédentes est dite convexe.

REM 13 : Quelques illustrations :



convexe — non convexe

PROP 14 : Pour toute famille $(C_i)_{i \in I}$ de parties convexes de $\mathbb{R}^n$, l'intersection $\bigcap_{i \in I} C_i$ est convexe.

PROP 15 : Soit f une application affine de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$. L'image d'un convexe C de $\mathbb{R}^n$ par f et l'image réciproque $f^{-1}(C)$ est aussi convexe.

EX 16 : On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ de la norme $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$. Alors la boule unité de $\mathbb{R}^n$ pour cette norme est convexe.

EX 17 : Les convexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

3) Lien avec les fonctions convexes [SZP]

DEF 18 : Soit C un convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : C \to \mathbb{R}$. On dit que f est convexe lorsque : $\forall (M,N) \in C^2$, $\forall t \in [0;1]$, $f(tM+(1-t)N) \leq t f(M) + (1-t) f(N)$.

REM 19 : La fonction f est convexe si et seulement si pour toute combinaison $\lambda_0 P_0 + \dots + \lambda_k P_k$ de points $P_0, \dots, P_k$ de C $f(\lambda_0 P_0 + \dots + \lambda_k P_k) \leq \lambda_0 f(P_0) + \dots + \lambda_k f(P_k)$.

DEF 20 : C convexe de $\mathbb{R}^n$, $f : C \to \mathbb{R}$. On définit son épigraphe $\mathcal{E}(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid y \geq f(x)\}$.

PROP 21 : Soit $f : C \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, C convexe. Alors, f est convexe $\Leftrightarrow$ $\mathcal{E}(f)$ est convexe.

II - Applications

1) Enveloppe convexe [CGT] [TAU] → Géométrie

PROP 22 : Soit $X \neq \emptyset$ une partie de $\mathbb{R}^n$. L'intersection $\mathrm{conv}(X)$ de toutes les parties convexes de $\mathbb{R}^n$ qui contiennent X est la plus petite partie convexe de $\mathbb{R}^n$ contenant X. C'est l'ensemble des barycentres $G = \mathrm{Bar}((A_1,\lambda_1), \dots, (A_k,\lambda_k))$ où $k \in \mathbb{N}^*$, $A_1, \dots, A_k \in X$, $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}^+$ avec $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$.

DEF 23 : $\mathrm{conv}(X)$ est l'enveloppe convexe de X.

PROP 24 : Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ affine. Alors $f(\mathrm{conv}(X)) = \mathrm{conv}(f(X))$

EX 25 : Si $X = \{A,B\}$ avec $A \neq B$, $\mathrm{conv}(X)$ est le segment $[A,B] = \{\lambda A + (1-\lambda) B \mid \lambda \in [0;1]\}$.
Si $X = \{A,B,C\}$ où $A \neq B$ et $C \notin (AB)$, alors $\mathrm{conv}(X)$ est le triangle ABC (intérieur et bord).

THM 26 (Gauss-Lucas) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant. Alors toute racine de P' appartient à l'enveloppe convexe des racines de P.

PROP 27 : Soit X une partie de $\mathbb{R}^n$, $X \neq \emptyset$.
1) L'intersection des convexes fermés de $\mathbb{R}^n$ contenant X est $\overline{\mathrm{conv}(X)}$.
2) Si X est convexe compact, alors $X = \mathrm{conv}(\partial X)$

REM 28 : Une enveloppe convexe n'est pas toujours fermée : $A = \{(0,0)\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}_+^2 \mid xy \geq 1\}$; $\mathrm{conv}(A) = \{(0,0)\} \cup (\mathbb{R}_+^*)^2$

THM 29 : (Carathéodory, APMS) Soit $A \subset \mathbb{R}^n$. Tout élément de $\mathrm{conv}(A)$ s'écrit comme combinaison convexe de k points de A avec $k \leq 1+n$.

COR 30 : Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}^n$.
1) Si A est compacte, alors $\mathrm{conv}(A)$ est compacte
2) Si A est bornée, alors $\mathrm{conv}(A)$ est bornée et on a : $\partial A = \partial \mathrm{conv}(A)$

2) Points extrémaux [SZP][CGT]

On recherche une partie la plus petite possible dont l'enveloppe convexe est un convexe donné. C est une partie convexe de $\mathbb{R}^n$.

DEF 31 : Soit $M \in C$. On dit que M est extrémal lorsque M n'est pas le milieu de deux points distincts de C.

REM 32 : Tout point extrémal de C est un point frontière.

PROP 33 : Soit $M \in C$. Les assertions suivantes sont équivalentes :
1) M est extrémal
2) M n'est pas contenu dans un segment d'extrémités dans C et distinctes de M
3) M n'est pas combinaison convexe de points de C distincts de M
4) $C \setminus \{M\}$ est convexe.

EX 34 : On reprend l'exemple de $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$. L'ensemble X des points extrémaux de $B(0,1)$ est la sphère unité $S(0,1)$.

PROP 35 : Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ affine telle que $f(C) = C$. Alors f permute les points extrémaux de C.

PROP 36: Soit C une partie convexe du plan affine $\mathbb{R}^2$. L'ensemble X des points extrémaux de C est fermé.

REM 37: Ce résultat est faux dans $\mathbb{R}^3$. voir ANNEXE.

3) Projection et hyperplans d'appui [SZP]

DEF 38: Soit H un hyperplan affine d'équation $f(M)=k$ avec f forme affine non constante. Les inéquations $f(M)\leq k$ et $f(M)\geq k$ (resp. $f(M)<k$ et $f(M)>k$) définissent chacune un ensemble de points appelés demi-espace fermé (resp. ouvert) délimité par H.

DEF 39: Soit C un convexe de $\mathbb{R}^n$. On dit qu'un hyperplan affine H est un hyperplan d'appui de C lorsque H contient un point de C et H délimite un demi-espace fermé contenant C. Si $P\in C\cap H$, on parle d'hyperplan d'appui en P.

PROP 40 On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne, soit C un convexe d'intérieur non vide. Soient $O\in \mathring{C}$ et H un hyperplan d'appui de C. Il existe un unique vecteur $\vec{n}\neq\vec{0}$ tel que $H=\{M\in\mathbb{R}^n / \vec{OM}\cdot\vec{n}=1\}$. Tout point de C vérifie $\vec{OM}\cdot\vec{n}\leq 1$.

PROP 41: Soit C un convexe de $\mathbb{R}^n$. Si un hyperplan d'appui de C contient une combinaison convexe à coefficients strictement positifs de points $A_0,\dots,A_p$ de C, alors H contient $A_0,\dots,A_p$.

THM 42: (Projection sur un convexe fermé) On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne. Soit $C\neq\emptyset$ un convexe fermé et $A\notin C$.

1) $\exists!\, P\in C$, $AP=d(A,C)$ appelé projeté de A sur C
2) L'hyperplan contenant P et orthogonal à $\vec{PA}$ est un hyperplan d'appui de C. voir ANNEXE

COR 43: Un convexe fermé de $\mathbb{R}^n$ est l'intersection des demi-espaces fermés le contenant.

DEV 2

THM 44: (Krein-Millman) Tout compact convexe de $\mathbb{R}^n$ est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux

4) Polytopes et polyèdres convexes [SZP]

DEF 45: Un polyèdre convexe de $\mathbb{R}^n$ est une intersection finie de demi-espaces fermés.
Un polytope de $\mathbb{R}^n$ est un polyèdre convexe compact et d'intérieur non vide.

REM 46: Il se peut qu'un demi-espace fermé soit inutile pour définir un polyèdre P. On peut toujours se ramener à une famille $(R_1,\dots,R_k)$ de demi-espaces fermés utiles dite minimale.

THM 47: Soit P un polyèdre convexe d'intérieur non vide, $P=\bigcap_{i=1}^{k} R_i$. Soit H_i l'hyperplan frontière de R_i. Si $\mathcal{R}=(R_1,\dots,R_k)$ est minimale, alors :

1) L'intersection d'un H_i avec P est d'intérieur non vide dans H_i et est appelé face de P associé à $\mathcal{R}$. H_i est appelé hyperplan de la face $H_i\cap P$.
2) ∂P est la réunion des faces de P associé à $\mathcal{R}$.
3) Tout hyperplan affine H dont l'intersection avec ∂P est d'intérieur non vide dans H est l'hyperplan d'une face de P associé à $\mathcal{R}$.
4) Tout polyèdre convexe admet une unique famille minimale de demi-espaces fermés le définissant.

DEF 48: Un point est un sommet du polyèdre P lorsqu'il appartient à P et à au moins 3 hyperplans frontières de demi-espace définissant P.

DEF 49: Une arête du polyèdre P est un segment joignant 2 sommets et inclus dans l'une des frontières des demi-espaces fermés définissant P.

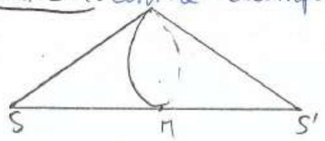
THM 50: Les points extrémaux d'un polyèdre P sont ses sommets.

PROP 51: Si P est un polytope, il est l'enveloppe convexe de ses sommets.

PROP 52: L'enveloppe convexe d'un ensemble fini de points est un polytope de l'espace affine engendré par cet ensemble.

PROP 53: (Euler) Soit P un polyèdre convexe compact de $\mathbb{R}^3$. Le nombre de sommets (s), d'arêtes (a) et de faces (f) de P sont tels que $s-a+f=2$.

ANNEXE 1 : Contre-exemple du cône convexe



ANNEXE 2 : Projection sur un convexe fermé